Обобщение теоремы Надя—Фояша о факторизации характеристической оператор-функции

А. В. КУЖЕЛЬ (Умань, СССР)

При изучении операторов, которые „мало" отклоняются*) от унитарного, разными авторами (см. [1—6]) вводилось понятие характеристической матрицы-функции или характеристической оператор-функции, изучение свойств которых даёт возможность выяснить ряд важных свойств рассматриваемых операторов. При этом существенную роль в теории характеристических функций играет теорема умножения, которая впервые была установлена в [3]. В окончательном виде (для случая, когда оператор T непрерывно обратим и оператор $I-T^*T$ конечномерный) теорема умножения вытекает из аналогичной теоремы, установленной в [7] для случая операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой.

В случае операторов сжатия Б. С.-Надь и Ч. Фояш [8] рассматривали и изучали соответствующие характеристические оператор-функции без каких либо ограничений относительно оператора $I-T^*T$. Затем в работах [9] и [10] в результате оригинальных построений ими была установлена формула умножения (аналог теоремы умножения) характеристических оператор-функций.

Здесь указанная формула умножения обобщается на случай произвольного ограниченного оператора T в предположении, что рассматриваемые инвариантные подпространства оператора T являются NF-подпространствами (§ 2). При этом предварительно вводится понятие характеристической оператор-функции в случае произвольного ограниченного оператора.

Отметим, что существует несколько в той или иной мере различных определений характеристической оператор-функции ограниченного неунитарного оператора (см. [11—14]). Здесь мы напоминаем и пользуемся определением из [14].

В заключение выражаю признательность проф. М. Г. Крейну, обратившему внимание автора на рассматриваемый круг вопросов.

*) Говорят, что ограниченный оператор T мало отклоняется от унитарного, если оператор $I-T^*T$ вполне непрерывный (в частности, конечномерный).

§ 1. Характеристическая оператор-функция

1. Пусть T — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Положим $D_T = I - T^*T$ и пусть

$$D_T = J|D_T| \quad \left(|D_T| = \sqrt{D_T^2}, \quad J = \operatorname{sign} D_T\right) \tag{1.1}$$

— полярное представление оператора D_T. В (1.1) J является частично изометрическим оператором [15], действующим из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{N}_T = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{Y}$ — подпространство нулей оператора D_T). Легко проверить, что оператор J перестановочен с $|D_T|$ а, значит, и с $|D_T|^{\frac{1}{2}}$. Кроме того, оператор J эрмитов и связан с оператором проектирования P на подпространство $\mathfrak{N}_T$ соотношением

$$J^2 = P. \tag{1.2}$$

Аналогично, если $D_{T^*} = \tilde{J}|D_{T^*}|$ — полярное представление оператора $D_{T^*} = I - TT^*$, то

$$\tilde{J}^* = \tilde{J}, \quad \tilde{J}|D_{T^*}|^{\frac{1}{2}} = |D_{T^*}|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}. \tag{1.3}$$

Далее, т. к. $A^{\frac{1}{2}}$ $(A \geqq O)$ является пределом (в сильном смысле) некоторой последовательности многочленов от A (см. [16], стр. 287), то из соотношения $FA = BF$, где F — некоторый ограниченный оператор, а $B \geqq O$, вытекает, что $FA^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}}F$. Воспользовавшись этим свойством, устанавливаем, что $T(D_T^2)^{\frac{1}{2}} = (D_{T^*}^2)^{\frac{1}{2}}T$, т. е.

$$T|D_T| = |D_{T^*}|T. \tag{1.4}$$

Аналогично устанавливается, что

$$T|D_T|^{\frac{1}{2}} = |D_{T^*}|^{\frac{1}{2}}T. \tag{1.5}$$

Используя предыдущие результаты, находим:

$$TJ|D_T| = TD_T = D_{T^*}T = \tilde{J}|D_{T^*}|T = \tilde{J}T|D_T|$$

и, следовательно,

$$TJ = \tilde{J}T \tag{1.6}$$

2. Положим для удобства $Q_T = |D_T|^{\frac{1}{2}}$ и рассмотрим оператор-функцию $\Theta_T(z)$, определяемую соотношением

$$\Theta_T(z) = TJ - zQ_{T^*}(I - zT^*)^{-1}Q_T. \tag{1.7}$$

Оператор-функцию $\Theta_T(z)$ будем называть *характеристической оператор-функцией* оператора T.

Так как $Q_{T^*}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_{T^*}$ и $TJ\mathfrak{H} = T\mathfrak{N}_T \subset \mathfrak{N}_{T^*}$, то

$$\Theta_T(z)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_{T^*}. \tag{1.8}$$

Учитывая теперь то, что операторы Q_T и Q_{T^*} эрмитовы и используя соотношение (1. 6), устанавливаем, что $\Theta_T^*(z)=\Theta_{T^*}(\bar{z})$.

Отметим ещё следующие соотношения, которые понадобятся в дальнейшем:

(1. 9) $$\Theta_T(z)Q_TJ = Q_{T^*}(I-zT^*)^{-1}(T-zI),$$

(1. 10) $$\Theta_T(z)J\Theta_T^*(0) = \tilde{J}-Q_{T^*}(I-zT^*)^{-1}Q_{T^*},$$

(1. 11) $$\Theta_T^*(0)\tilde{J}\Theta_T(z) = J-Q_T(I-zT^*)^{-1}Q_T.$$

Чтобы получить (1. 9), достаточно умножить (1. 7) справа на Q_TJ и воспользоваться соотношениями $Q_TJ=JQ_T$ и (1. 5). Для доказательства (1. 10) достаточно умножить (1. 7) справа на $J\Theta_T^*(0)$ и воспользоваться соотношениями $\Theta_T(0)=TJ$ (1. 6) и (1. 5). Подобным же образом устанавливается и соотношение (1. 11).

§ 2. NF-подпространства

1. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное относительно оператора T подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Тогда подпространство $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно оператора T^* и, при этом, операторы T и T^* можно представить в виде

(2. 1) $$T=\begin{pmatrix} T_1 & \Gamma \\ O & T_2 \end{pmatrix},\quad T^*=\begin{pmatrix} T_1^* & O \\ \Gamma^* & T_2^* \end{pmatrix},$$

где $T_1=T|_{\mathfrak{H}_1}$, $T_2=(T^*|_{\mathfrak{H}_2})^*$, а Γ — ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$.

В дальнейшем инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ будем называть *подпространством Надя—Фояша* (*NF-подпространством*), если оператор Γ может быть представлен в виде

(2. 2) $$\Gamma = Q_{T_1^*}LQ_{T_2},$$

где L — некоторый ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$. Как показали Б. С.- Надь и Ч. Фояш [9, 10], произвольное инвариантное подпространство сжатия T является NF-подпространстрвом.[1])

[1]) Однако в общем случае указанное свойство не сохраняется. Действительно, легко построить пример оператора, инвариантное подпространство которого не является NF-подпространством. Для этого достаточно в пространстве $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ рассмотреть оператор T, определяемый соотношением (2.1), где T_1 и T_2 — произвольные ограниченные операторы, действующие в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно, а оператор Γ выбран так, чтобы его область значений не содержалась в $\mathfrak{N}_{T_1^*}$. В частности, если T_1 — унитарный оператор, а оператор Γ отличен от пулевого, то инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ оператора T не будет NF-подпространством.

Не ограничивая общности, можем считать, что в случае NF-подпространств

$$\mathfrak{D}(L)\subset\mathfrak{N}_{T_2},\quad \mathfrak{R}(L)\subset\mathfrak{N}_{T_1^*},\quad \mathfrak{D}(L^*)\subset\mathfrak{N}_{T_1^*},\quad \mathfrak{R}(L^*)\subset\mathfrak{N}_{T_2},$$

где $\mathfrak{D}(A)$ — область определения, а $\mathfrak{R}(A)$ — множество значений оператора A.

2. Пусть $D_{T_k}=Q_{T_k}^2 J_k$ $(Q_{T_k}=|D_{T_k}|^{\frac{1}{2}})$ — полярное представление оператора $D_{T_k}=I_k-T_k^*T_k$ $(k=1, 2)$. Используя соотношения (2. 1), (2. 2) и (1. 4), убеждаемся, что

(2. 3)
$$D_T=QXQ,$$

где

(2. 4)
$$Q=\begin{pmatrix}Q_{T_1} & O\\ O & Q_{T_2}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}J_1 & -T_1^*L\\ -L^*T_1 & J_2-L^*Q_{T_1^*}^2L\end{pmatrix}.$$

Положим

(2. 5)
$$S_L=J_2-L^*\tilde{J}_1L,$$

где $\tilde{J}_1=\operatorname{sign} D_{T_1^*}$. Воспользовавшись равенствами $Q_{T_1^*}^2=(I_1-T_1T_1^*)\tilde{J}_1$ и (1. 6), получим:

$$J_2-L^*Q_{T_1^*}^2L=S_L+L^*T_1J_1T_1^*L.$$

После этого операторная матрица X запишется в виде

(2. 6)
$$X=\gamma^*J_0\gamma,$$

где

(2. 7)
$$\gamma=\begin{pmatrix}J_1 & -T_1^*L\\ O & |S_L|^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\quad J_0=\begin{pmatrix}J_1 & O\\ O & J_L\end{pmatrix},$$

а $J_L=\operatorname{sign}S_L$. Подставляя (2. 6) в (2. 3) и учитывая соотношение $D_T=Q_TJQ_T$, получим:

(2. 8)
$$Q_TJQ_T=Q\gamma^*J_0\gamma Q.$$

3. Рассмотрим оператор σ, определяемый соотношением

(2. 9)
$$\sigma Q_Tf=\gamma Qf\qquad (f\in\mathfrak{H})$$

и покажем, что такое определение корректно. Для этого достаточно показать, что если $Q_Tf=0$, то и $\gamma Qf=0$. Пусть $Q_Tf=0$. Тогда, в силу (2. 8), при любом $\varphi\in\mathfrak{H}$

$$(\gamma Qf,\ J_0\gamma Q\varphi)=0.$$

При этом, в силу (2. 4) и (2. 7), $\gamma Qf=g_1+g_2$, где

(2. 10)
$$g_1=J_1Q_{T_1}f_1-T_1^*LQ_{T_2}f_2,\quad g_2=|S_L|^{\frac{1}{2}}Q_{T_2}f_2$$

Если при этом $\varphi\in\mathfrak{H}_1$, то, как легко убедиться (используя соотношения (2. 4) и (2. 7)) $J_0\gamma Q\varphi=Q_{T_1}\varphi$. Поэтому в этом случае

$$(\gamma Qf,\ J_0\gamma Q\varphi)=(g_1,\ Q_{T_1}\varphi)=0\quad (\varphi\in\mathfrak{H}_1)$$

и, следовательно, $g_1 \perp \mathfrak{N}_{T_1}$. С другой стороны, так как $\mathfrak{R}(L) \subset \mathfrak{N}_{T_1^*}$, $T_1^* \mathfrak{N}_{T_1^*} \subset \mathfrak{N}_{T_1}$ и $J_1 \mathfrak{N}_{T_1} = \mathfrak{N}_{T_1}$, то $g_1 \in \mathfrak{N}_{T_1}$. Следовательно, $g_1 = 0$ и $\gamma Q f = g_2$. Но тогда, при любом $\varphi \in \mathfrak{H}$

$$(\gamma Q f, J_0 \gamma Q \varphi) = (g_2, J_L |S_L|^{\frac{1}{2}} Q_{T_2} \varphi) = 0.$$

Следовательно, $g_2 \in \mathfrak{R}(|S_L|^{\frac{1}{2}})$ и $g_2 \perp \mathfrak{R}(|S_L|^{\frac{1}{2}})$, т. е. $g_2 = 0$. Таким образом, определение оператора σ корректно. При этом, как легко видеть, оператор σ линейный.

Найдем теперь оператор σ^*. Используя соотношение (2. 8) и свойства операторов Q_T и J, легко установить, что если при некотором f $J_0 \gamma Q f = 0$, то $J Q_T f = 0$. Поэтому мы можем рассмотреть линейный оператор А, определяемый соотношением

$$A(J_0 \gamma Q f) = J Q_T f. \tag{2. 11}$$

Если теперь g — фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$, то при любом $f \in \mathfrak{H}$, в силу (2. 9), (2. 8) и (2. 11),

$$(\sigma Q_T f, J_0 \gamma Q g) = (Q_T J Q_T f, g) = (Q_T f, A J_0 \gamma Q g).$$

А это означает, что

$$\sigma^* J_0 \gamma Q f = J Q_T f \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2. 12}$$

Используя теперь (2. 9) и (2. 12), устанавливаем, что

$$\sigma^* J_0 \sigma \subseteqq J, \quad \sigma J \sigma^* \subseteqq J_0. \tag{2. 13}$$

Учитывая эти соотношения, операторы σ и σ^* будем соответственно называть (J, J_0)-*изометрическим* и (J_0, J)-*изометрическим*.

3. Рассуждая как и раньше, устанавливаем, что оператор $Q_{T^*} \tilde{J} Q_{T^*} = D_{T^*}$ представим в виде

$$Q_{T^*} \tilde{J} Q_{T^*} = \tilde{Q} \tilde{\gamma} \tilde{J}_0 \tilde{\gamma}^* \tilde{Q}, \tag{2. 14}$$

где

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_{T_1^*} & O \\ O & Q_{T_2^*} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & -L T_2^* \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{J}_L & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_L = \tilde{J}_1 - L J_2 L^*, \quad \tilde{J}_L = \operatorname{sign} \tilde{S}_L.$$

Отметим, что как легко проверить, операторы S_L и $\tilde{S}_L$ связаны соотношением

$$\tilde{S}_L \tilde{J}_1 L = L J_2 S_L. \tag{2. 15}$$

Определим оператор $\tilde{\sigma}$ соотношением

$$\tilde{\sigma} Q_{T^*} f = \tilde{\gamma}^* \tilde{Q} f \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2. 16}$$

Как и в предыдущем пункте устанавливается, что такое определение корректно, оператор $\tilde{\sigma}^*$ определён соотношением

(2.17) $$\tilde{\sigma}^*(\tilde{J}_0\tilde{\gamma}^*\tilde{Q}f) = \tilde{J}Q_{T^*}f$$

и, при этом,

(2.18) $$\tilde{\sigma}\tilde{J}\tilde{\sigma}^* \subseteqq \tilde{J}_0, \quad \tilde{\sigma}^*\tilde{J}_0\tilde{\sigma} \subseteqq \tilde{J}$$

(т. е. оператор $\tilde{\sigma}$ является $(\tilde{J}, \tilde{J}_0)$-изометрическим, а $\tilde{\sigma}^*$ — $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-изометрическим).

§ 3. Факторизация характеристической оператор-функции

1. На основании (1. 9) и (2. 17)

(3. 1) $$\Theta_T(z)Q_TJ = \tilde{U}N,$$

где $\tilde{U} = \tilde{J}\tilde{\sigma}^*\tilde{J}_0$, а

(3. 2) $$N = \tilde{\gamma}^*\tilde{Q}(I - zT^*)^{-1}(T - zI).$$

При этом, в силу (2. 18),

(3. 3) $$\tilde{U}\tilde{J}_0\tilde{U}^* \subseteqq \tilde{J}, \quad \tilde{U}^*\tilde{J}\tilde{U} \subseteqq \tilde{J}_0.$$

Используя равенства (2. 1), находим:

(3. 4) $$K_z = \begin{pmatrix} K_{1z} & O \\ zK_{2z}\Gamma^*K_{1z} & K_{2z} \end{pmatrix}, \quad T - zI = \begin{pmatrix} T_1 - zI_1 & \Gamma \\ O & T_2 - zI_2 \end{pmatrix},$$

где

$$K_z = (I - zT^*)^{-1}, \quad K_{jz} = (I_j - zT_j^*)^{-1} \qquad (j = 1, 2);$$

I_j — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_j$. Подставляя (3. 4) в (3. 2) и используя выражения для операторов $\tilde{\gamma}^*$ и $\tilde{Q}$, а также, соотношение (1. 9), записанное для операторов T_1 и T_2, получим:

(3. 5) $$N = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & O \\ -T_2L^* & \tilde{J}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{T_1^*}T_1(z) & Q_{T_1^*}K_{1z}\Gamma \\ Q_{T_2^*}F(T_1 - zI_1) & Q_{T_2^*}F\Gamma + Q_{T_2^*}T_2(z) \end{pmatrix},$$

где

(3. 6) $$F = zK_{2z}\Gamma^*K_{1z}, \quad T_j(z) = K_{jz}(T_j - zI_j) \qquad (j = 1, 2).$$

Если при этом N_{kl} — элементы операторной матрицы N, то, в силу (3. 5), (3. 6) и (1. 9),

(3. 7) $$N_{11} = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\Theta_{T_1}(z)Q_{T_1}J_1.$$

На основании соотношений (3. 5), (3. 6), (2. 2) и (1. 10) (записывая последнее для оператора T_1 в виде $Q_{T_1^*}K_{1z}Q_{T_1^*} = \tilde{J}_1 - \Theta_{T_1}(z)J_1T_1^*\tilde{J}_1$), получим:

(3. 8) $$N_{12} = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}[I_1 - \Theta_{T_1}(z)J_1T_1^*]\tilde{J}_1LQ_{T_2}.$$

Аналогично, используя соотношения (3. 5), (3. 6), (1. 9) и (2. 2), устанавливаем, что

$$N_{21} = [-T_2 P_2 + z\tilde{J}_2 Q_{T_2^*} K_{2z} Q_{T_2}] L^* \Theta_{T_1}(z) Q_{T_1} J_1,$$

где P_2 — оператор проектирования на $\mathfrak{N}_{T_2}$. А так как $T_2 P_2 = T_2 J_2^2 = \tilde{J}_2 T_2 J_2$, то

$$-T_2 P_2 + z\tilde{J}_2 Q_{T_2^*} K_{2z} Q_{T_2} = -\tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$N_{21} = -\tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) L^* \Theta_{T_1}(z) Q_{T_1} J_1. \tag{3.10}$$

Вычислим, наконец, оператор N_{22}. В силу (3. 5), (3. 6) и (2. 2)

$$N_{22} = [-T_2 P_2 + z\tilde{J}_2 Q_{T_2^*} K_{2z} Q_{T_2}] L^* Q_{T_1^*} K_{1z} Q_{T_1^*} L Q_{T_2} + \tilde{J}_2 Q_{T_2^*} T_2(z).$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (3. 9), (3. 6), (1. 9) и перестановочностью операторов Q_{T_2} и J_2, получим:

$$N_{22} = \tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) [J_2 - L^* Q_{T_1^*} K_{1z} Q_{T_1^*} L] Q_{T_2}.$$

А так как, в силу соотношений (1. 10), (2. 5) и $J_1 \Theta^*_{T_1}(0) = P_1 T_1^*$,

$$J_2 - L^* Q_{T_1^*} K_{1z} Q_{T_1^*} L = S_L + L^* \Theta_{T_1}(z) T_1^* L,$$

то, окончательно,

$$N_{22} = \tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) [S_L + L^* \Theta_{T_1}(z) T_1^* L] Q_{T_2}. \tag{3.11}$$

После этого, как легко проверить,

$$N = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \Theta_{T_1}(z) & |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_1 L \\ -\tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) L^* \Theta_{T_1}(z) & \tilde{J}_2 \Theta_{T_2}(z) S_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & -T_1^* L \\ O & I_2 \end{pmatrix} Q, \tag{3.12}$$

где оператор Q определяется соотношением (2. 4).

2. Рассмотрим теперь оператор R, определяемый соотношением

$$R |S_L|^{\frac{1}{2}} f_2 = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_1 L f_2 \tag{3.13}$$

и покажем, что $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_1 L f_2 = 0$, если $|S_L|^{\frac{1}{2}} f_2 = 0$ при некотором $f_2 \in \mathfrak{H}_2$. Действительно, в таком случае $S_L f_2 = 0$ и, следовательно, в силу (2. 15), $\tilde{S}_L \tilde{J}_1 L f_2 = 0$.

Положим $\varphi = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_1 L f_2$. Тогда, на основании предыдущего, $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \varphi = 0$ и, следовательно,

$$(\varphi, \varphi) = (|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \varphi, \ \tilde{J}_1 L f_2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_1 L f_2 = 0.$$

Отметим, что в том случае, когда T_1 и T_2 — сжатия,

$$S_L = D_L, \quad \tilde{S}_L = D_{L^*}, \quad |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} L = L |S_L|^{\frac{1}{2}}$$

и, следовательно, $R = L$.

Используя соотношение $L^*\tilde{J}_1\tilde{S}_L = S_L J_2 L^*$ (которое вытекает из (2. 15)) и рассуждая так же, как и при доказательстве корректности определения оператора R, устанавливаем, что равенство $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2 = 0$ ($f_2 \in \mathfrak{H}_2$) влечёт равенство $|S_L|^{\frac{1}{2}} J_L J_2 L^* f_2 = 0$. Следовательно, мы можем рассмотреть линейный оператор B, определяемый соотношением

$$B|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2 = |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L J_2 L^* f_2. \tag{3.14}$$

После этого легко проверить, что

$$(R|S_L|^{\frac{1}{2}} f_2, |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L g_2) = (|S_L|^{\frac{1}{2}} f_2, B|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L g_2)$$

и, следовательно, $B = R^*$.

Для дальнейшего необходимы следующие соотношения:

$$RJ_L R^* \subseteqq \tilde{J}_L - |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}, \tag{3, 15}$$

$$R^*\tilde{J}_L R \subseteqq J_L - J_L|S_L|^{\frac{1}{2}} J_2|S_L|^{\frac{1}{2}} J_L. \tag{3.16}$$

Чтобы обосновать (3. 15), положим $\varphi = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2$ и воспользуемся соотношениями (3. 14), (3. 13) и выражением для оператора $\tilde{S}_L$. В результате получим:

$$RJ_L R^*\varphi = \tilde{J}_L\varphi - |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\varphi,$$

что и доказывает (3. 15). Соотношение (3. 16) обосновывается аналогично.

3. Воспользовавшись соотношениями (3. 12) и (3. 13), получим, после некоторых простых преобразований:

$$N = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix} \Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\gamma Q, \tag{3.17}$$

где

$$\Theta_1(z) = \begin{pmatrix} \Theta_{T_1}(z) & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(z) = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ o & \Theta_{T_2}(z) \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & R \\ -L^* & |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L \end{pmatrix}.$$

При этом, как легко проверить, воспользовавшись соотношениями (3. 13), (3. 15) и (3. 16),

$$\omega J_\alpha \omega^* \subseteqq J_\beta, \quad \omega^* J_\beta \omega \subseteqq J_\alpha, \tag{3.18}$$

где

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & O \\ O & J_L \end{pmatrix}, \quad J_\beta = \begin{pmatrix} \tilde{J}_L & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}.$$

После этого, на основании (3. 1) и (3. 17),

$$\Theta_T(z) Q_T J = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\sigma Q_T, \tag{3.19}$$

где $U = \tilde{U}\begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix}$. Учитывая при этом выражение для оператора $\tilde{J}_0$ и соотношения (3. 3), убеждаемся, что оператор U является $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-изометрическим, а оператор U^* — $(\tilde{J}, \tilde{J}_0)$-изометрическим.

Так как операторы Q_T и J перестановочны, то, в силу (3. 19), при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\Theta_T(z)J\varphi = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\sigma\varphi \qquad (\varphi = Q_T f),$$

или

$$\Theta_T(z)\varphi = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)V\varphi \qquad (\varphi \in Q_T\mathfrak{H}),$$

где $V = \sigma J$. Используя соотношение (2. 13), убеждаемся, что оператор V является (J, J_0)-изометрическим.

Таким образом, на основании предыдущего, имеет место следующая

Теорема. *Если инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ ограниченного оператора T является NF-подпространством, то*

$$\Theta_T(z)|_{\mathfrak{L}} = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)V \qquad (\mathfrak{L} = Q_T\mathfrak{H}), \tag{3.20}$$

где

$$\Theta_1(z) = \begin{pmatrix} \Theta_{T_1}(z) & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(z) = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & \Theta_{T_2}(z) \end{pmatrix},$$

U, V и ω — постоянные соответственно $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-, (J, J_0)-, и (J_α, J_β)-изометрические операторы.

4. В том случае, когда оператор T является сжатием, операторы J, $\tilde{J}$, J_k, $\tilde{J}_k$ $(k=1, 2)$, J_L, $\tilde{J}_L$, J_0 и $\tilde{J}_0$ совпадают на соответствующих подпространствах с единичными операторами; оператор $S_L = D_L$; $R = L$; операторы U, V и ω являются частично изометрическими операторами и, следовательно, могут быть расширены по непрерывности. В результате равенство (3. 20) будет выполняться на всём подпространстве $\mathfrak{N}_T$. Таким образом, в этом случае полученный результат совпадает с результатом работы [10] (теорема 2).

В заключение отметим, что в случае непрерывной обратимости оператора T и конечномерности оператора $I - T^*T$ полученный здесь результат не перекрывает соответствующего результата из работы [7] (так как в [7] на оператор Γ не накладывалось никаких ограничений).

Цитированная литература

[1] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19(61)** (1946), 239—262.

[2] М. С. Лившиц, Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. сб.*, **26**(68) (1950), 247—264.

[3] М. С. Лившиц—В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН СССР*, **72** (1950), 625—628.

[4] В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, *ДАН СССР*, **113** (1957), 756—759.

[5] А. В. Кужель, Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов, *Научн. докл. высшей школы, физ.-мат. науки*, 3 (1959), 33—41.

[6] А. В. Кужель, Характеристичні матриці-функції квазіунітарних операторів довільного рангу в просторі з індефінітною метрикою, *ДАН УРСР*, **9** (1962), 1135—1138.

[7] А. В. Кужель, Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *Теория функций, функц. анализ и их приложения*, **4** (1967), 3—27.

[8] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3238.

[9] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.

[10] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 201—212.

[11] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН СССР*, **93** (1953), 985—988.

[12] И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн, О треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, *ДАН СССР*, **175** (1967), 272—275.

[13] В. Н. Поляков, К теории характеристических функций линейных операторов, *Изв. вузов*, (сер. матем.) **8 (63)** (1967), 53—59.

[14] А. В. Кужель, Характеристична оператор-функція довільного обмеженного оператора, *ДАН УРСР*, (сер. А) **3** (1968), 233—236.

[15] И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* (Москва, *1965*).

[16] Ф. Рисс—Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу* (Москва, *1954*).

(Поступило 13/VI/1968 г.)